Topologia

Lista 4 (Ciągłość, homeomorficzność, zwartość)

Zad 1. Wykazać, że każde odwzorowanie przestrzeni dyskretnej w dowolną przestrzeń topologiczną jest ciągłe.

Zad 2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną rozważaną w ostatnim zadaniu listy 3. Czy odwzorowanie $f : X \to X$ dane wzorem $f(x_n) = x_{n+1}$ jest ciągłe?

Zad 3. Kiedy przekształcenie identycznościowe $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ jest ciągłe?

Zad 4. Podać przykład funkcji na prostej euklidesowej, która jest ciągła tylko w jednym punkcie.

Zad 5. Podać przykład funkcji na prostej euklidesowej, ciągłej tylko w liczbach niewymiernych.

Zad 6. Niech $\mathbb{R}$ będzie prostą euklidesową, a $\mathbb{R}_l$ przestrzenią topologiczną $(\mathbb{R}, \tau_{[\,)})$, gdzie $\tau_{[\,)}$ jest topologią zdefiniowaną na liście 3. Które z przekształceń a) $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$; b) $f, g, h : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$ danych wzorami

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \lfloor x \rfloor - x + 1, \qquad h(x) = \lfloor x \rfloor,$$

gdzie $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$, jest ciągłe?

Zad 7. Zbudować przykład surjektywnej funkcji ciągłej $f : X \to Y$, gdzie X i Y są podprzestrzeniami prostej euklidesowej, przy czym

a) $X = (a, b)$, $Y = [c, d)$, b) $X = [a, b)$, $Y = [c, d)$, c) $X = [a, b)$, $Y = (c, d)$.

Czy istnieje taka funkcja w przypadkach d) $X = [a, b]$, $Y = [c, d)$; e) $X = [a, b]$, $Y = (c, d)$?

Zad 8. Niech $[0, 1]$ oraz $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ będą odpowiednio popdrzestrzeniami prostej oraz płaszczyzny euklidesowej. Czy istnieje surjektywna funkcja ciągła

a) $f : [0, 1] \to S^1$, b) $f : S^1 \to [0, 1]$?

Zad 9. Niech $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ oraz Y będą wyposażone w topologię euklidesową. Znaleźć surjektywną funkcję ciągłą $f : X \to Y$, gdy

a) $Y = [0, 1]$, b) $Y = [0, 1)$, c) $Y = (0, 1)$,

d) $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, e) $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Zad 10. Dowieść, że w przestrzeni euklidesowej kula otwarta nie jest homeomorficzna z kulą domkniętą.

Zad 11. Czy następujące podprzestrzenie płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (1 - e^{-t}) \cos t, y = (1 - e^{-t}) \sin t,\ t \in [0, \infty),\ \text{lub } x^2 + y^2 = 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (1 + e^{t}) \cos t, y = (1 + e^{t}) \sin t,\ t \in [0, \infty),\ \text{lub } x^2 + y^2 = 1\}$$

są homeomorficzne?

Zad 12. Niech $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} [2n.2n + 1)$ będzie podprzestrzenią prostej euklidesowej $\mathbb{R}$. Wskazać przykład różnowartościowej ciągłej surjekcji $f : X \to \mathbb{R}$. Czy istnieje homeomorfizm $h : X \to \mathbb{R}$?

Zad 13. Pokazać, że przestrzeń dyskretna (X, τ) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór X jest skończony.

Zad 14. Czy przestrzeń $X = [0, 1]$ z topologią indukowaną z $\mathbb{R}_l$ jest zwarta?